CE QU'IL FAUT SAVOIR EN CALCULS NUMÉRIQUES

1- LES NOMBRES RELATIFS.

a) Addition de deux relatifs.

Pour additionner deux nombres relatifs de **même signe**,
on garde le signe commun et on ajoute les deux valeurs (sans le signe).

Exemples :

$A = -12 \ -8$ — *Les 2 nombres sont négatifs.* — $A = -20$

$B = +5 \ +3$ — *Les 2 nombres sont positifs.* — $B = 8$

$C = -3 \ -10 \ -5 \ -7$ — *Ils sont tous négatifs.* — $C = -25$

Pour additionner deux nombres relatifs de **signes contraires**,
on prend le signe de la plus grande valeur et on soustrait la plus grande valeur à la plus petite.

Exemples :

$A = -2 \ +8$ — *Les signes sont contraires. 8 > 2 donc le résultat est positif* — $A = 6$

$B = 5 \ -13$ — *Les signes sont contraires. 13 > 5 donc le résultat est négatif.* — $B = -8$

b) Soustraction de deux relatifs.

Soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé : $a - b = a + (-b)$

Application à la suppression du signe − devant une parenthèse :

- *Quand la parenthèse ne contient qu'un seul nombre :* $-(+a) = -a$ $\quad -(-a) = +a$
- *Quand la parenthèse contient une expression :* $-(expression)$ = *opposé de l'expression*

Exemples :

$A = 8 - (-8)$ $\quad B = -15 - (+8)$

$A = 8 + 8$ $\quad B = -15 - 8$

$A = 16$ $\quad B = -23$

$5 - (-2 + 5 - 3) = 5 + 2 - 5 + 3$

opposé de $-2 + 5 - 3$

c) Suite d'additions et de soustractions

Exemple :

$A = -24 + 9 - (-8) - (-7) - (8 - 15) - 9 - 2$ — *On supprime les parenthèses en appliquant les règles du b).*

$A = -24 \boxed{+9} \boxed{+8} + 7 \boxed{-8} + 15 \boxed{-9} - 2$ — *On supprime les nombres opposés :* $+9 -9 = 0$ *et* $+8 -8 = 0$

$A = -24 + 7 + 15 - 2$ — *On regroupe les termes positifs :* $+7 + 15 = 22$

$A = -26 + 22$ — *On regroupe les termes négatifs :* $-24 -2 = -26$

$A = -4$

d) Multiplication et division de deux relatifs.

Pour multiplier (ou diviser) deux nombres relatifs,
on multiplie (ou on divise) les deux valeurs entre elles et on suit la règle des signes suivante :

positif × positif → positif $\qquad$ positif × négatif → négatif

négatif × négatif → positif $\qquad$ négatif × positif → négatif

Exemples :

$A = 10 \times (-8)$ $\quad B = -12 \times (-5)$ $\quad C = -100 : 25$

$A = -80$ $\quad B = 60$ $\quad C = -4$

2- LES ECRITURES FRACTIONNAIRES.

a) La règle fondamentale.

Pour tous les nombres a, b et k ($b \neq 0$ et $k \neq 0$), on a toujours : $\dfrac{k \times a}{k \times b} = \dfrac{a}{b}$

Cette règle permet de simplifier des fractions ou de les transformer pour avoir un dénominateur commun

b) Addition et soustraction.

Pour additionner (ou soustraire) 2 nombres relatifs en écriture fractionnaire :

➔ on transforme, si nécessaire, les deux nombres avec un même dénominateur

➔ puis on additionne (ou on soustrait) les numérateurs entre eux et on garde le dénominateur commun

Pour $d \neq 0$, *Addition* : $\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}$ *Soustraction* : $\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}$

Exemples :

$A=\frac{4}{5}-\frac{1}{9}$

$A=\frac{4\times 9}{5\times 9}-\frac{1\times 5}{9\times 5}$

$A=\frac{36}{45}-\frac{5}{45}$

$A=\frac{36-5}{45}$

$A=\frac{31}{45}$

On transforme les 2 fractions avec le même dénominateur

$B=\frac{5}{6}+1$

$B=\frac{5}{6}+\frac{6}{6}$

$B=\frac{5+6}{6}$

$B=\frac{11}{6}$

c) Multiplication.

Pour multiplier deux nombres relatifs en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Pour $b \neq 0$ et $d \neq 0$, on a $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times b}{c\times d}$

Exemples :

$A=\frac{8}{3}\times\frac{-2}{7}$

$A=\frac{8\times(-2)}{3\times 7}$

$A=\frac{-16}{21}$

$B=\frac{17}{-15}\times\frac{-13}{17}$

$B=\frac{17\times(-13)}{-15\times 17}$

$B=\frac{-13}{-15}$

$B=\frac{13}{15}$

Il est parfois préférable de simplifier avant de calculer, comme ici où on simplifie par 17.

$C=3\times\frac{-5}{4}$

$C=\frac{3\times(-5)}{4}$

$C=\frac{-15}{4}$

Le nombre 3 peut s'écrire $\frac{3}{1}$.

d) Division.

Pour diviser par un nombre relatif non nul en écriture fractionnaire, on multiplie par son inverse.

Pour $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$, on a : $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ ou bien $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

Exemples :

$A=\frac{5}{3}:\frac{-2}{7}$

$A=\frac{5}{3}\times\frac{7}{-2}$

$A=\frac{5\times 7}{3\times(-2)}$

$A=\frac{35}{-6}$

$(A=-\frac{35}{6})$

$B=\frac{\frac{4}{-7}}{\frac{-13}{7}}$

$B=\frac{4}{7}\times\frac{7}{13}$

$B=\frac{4\times 7}{7\times 13}$

$B=\frac{4}{13}$

Comme $\frac{4}{-7}$ *et* $\frac{-13}{7}$ *sont 2 nombres négatifs, leur quotient sera positif, ce qui permet de travailler sans les signes –.*

$C=\frac{12}{\frac{-5}{7}}$

Pour ce calcul, on divise par $\frac{-5}{7}$

$C=12\times\frac{7}{-5}$

$C=\frac{12\times 7}{-5}$

$C=\frac{84}{-5}$

$(C=-\frac{84}{5})$

$D=\frac{\frac{12}{-5}}{7}$

Pour ce calcul, on divise par 7

$D=\frac{12}{-5}\times\frac{1}{7}$

$D=\frac{12}{-35}$

$(D=-\frac{12}{35})$

L'inverse du nombre 7 c'est $\frac{1}{7}$

3- LES PUISSANCES.

a) La notation a^n et a^{-n}.

Pour $n > 1$, (n étant un entier), le produit de n facteurs égaux à a est noté a^n.

On lit « a puissance n ». $\quad a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{n\ \text{facteurs}}$.

On note aussi $\boldsymbol{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$ c'est à dire $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{n\ \text{facteurs}}}$.

- Convention :

Si $a \neq 0$, on convient que le nombre $\boxed{a^0 \text{ est toujours égal à } 1}$.

0^0 n'a aucune signification. $\boxed{0^0 \text{ n'existe pas}}$.

- Cas particuliers :

$a^1 = a \qquad a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

$1^n = 1 \qquad 0^n = 0$

b) Opérations et puissances.

(1)
Multiplication entre puissances d'un **même nombre a** : $\quad$ *on ajoute les exposants* $\quad \boldsymbol{a^n \times a^m = a^{n+m}}$.

(2)
Multiplication entre nombres ayant **le même exposant n** : $\quad$ *on multiplie les nombres* $\quad a^n \times b^n = (a \times b)^n$

(3)
Division entre puissances d'un **même nombre a** : $\quad$ *on soustrait les exposants* $\quad \boldsymbol{\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$

(4)
Division entre nombres ayant **le même exposant n** : $\quad$ *on divise les nombres* $\quad \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

(5)
Puissance de puissance : $\quad$ *on multiplie les exposants* $\quad (a^n)^m = a^{n \times m}$

Exemples :

(1)
$9^3 \times 9^7 = 9^{10}$
$10^7 \times 10^{-2} = 10^9$
$2^{-8} \times 2^{-5} = 2^{-13}$

(2)
$3^5 \times 4^5 = 12^5$
$7^2 \times (-3)^2 = (-21)^2$
$2^{-2} \times 5^{-2} = 10^{-2}$

(3)
$\dfrac{10^9}{10^5} = 10^4$
$\dfrac{4^5}{4^{-2}} = 4^7$

(4)
$\dfrac{30^4}{3^4} = 10^4$
$\dfrac{4^7}{(-1)^7} = (-4)^7$

(5)
$(10^5)^3 = 10^{15}$
$(5^{-4})^3 = 5^{-12}$

Attention : Ne pas confondre $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$ *et* $-3^2 = -3 \times 3 = -9$

c) Les puissances de 10.

On a : $\quad 10^n = \underbrace{100\ldots0}_{n\ \text{zéros}}$ $\quad$ et $\quad 10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} = \dfrac{1}{\underbrace{100\ldots0}_{n\ \text{zéros}}} = 0,\underbrace{00\ldots01}_{n\ \text{chiffres}}$

On parle de **l'écriture scientifique d'un nombre** quand ce nombre s'écrit avec un seul chiffre non nul devant la virgule et une puissance de 10 : $\quad \boldsymbol{a \times 10^n}$ avec $\boldsymbol{1 \leqslant a < 10}$.

Exemples :

$\underbrace{158000}_{\text{5 chiffres avant la virgule}} = \mathbf{1},58 \times 10^5 \qquad \underbrace{0,000008}_{\text{6 chiffres après la virgule}}4 = \mathbf{8},4 \times 10^{-6}$

un seul chiffre non nul

$A = 254,7 \times 10^{-8}$
$A = 2,547 \times 10^2 \times 10^{-8}$ $\quad$ *On transforme 254,7 en écriture scientifique.*
$A = 2,547 \times 10^{2-8}$ $\quad$ *On applique les règles de calculs des puissances.*
$A = 2,547 \times 10^{-6}$

Attention : Ne pas confondre 10^{-6} *et* $0,000006 = 6 \times 10^{-6}$